

Démarche de base en séries temporelles (compléments du Chapitre 1)

Yves Aragon*

Université Toulouse Capitole

12 mai 2020

Exercice 1.1 (Opérateur retard)

Calculer : (a) $(1 - 0.9B)1$, (b) $(1 - 0.9B)t$, (c) $\frac{1}{1 - 0.9B}t$, où 1 désigne la fonction constante, et t la fonction $t \mapsto t \forall t$.

Réponse

— (a) Opérateur retard appliqué à la fonction constante $t \mapsto 1 \forall t$,

$$(1 - 0.9B)1 = 1 - 0.9B1 = 1 - 0.9 = 0.1$$

et

$$(1 - B)1 = 0,$$

tout simplement, l'accroissement d'une fonction constante est nul.

— (b) Opérateur retard appliqué à la fonction $t \mapsto t \forall t$

$$(1 - 0.9B)t = t - 0.9Bt = t - 0.9(t - 1) = 0.1t + 0.9$$

et

$$(1 - B)t = t - (t - 1) = 1.$$

— (c) Fraction rationnelle de l'opérateur retard :

$$\frac{1}{1 - 0.9B}1 = (1 + 0.9B + (0.9)^2 B^2 + \dots)1 = 1 + 0.9 + (0.9)^2 + \dots = \frac{1}{1 - 0.9} = 10,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 0.9B}t &= (1 + 0.9B + 0.9^2 B^2 + \dots)t = t + 0.9(t - 1) + 0.9^2(t - 2) + \dots = \\ &= t \frac{1}{1 - 0.9} - 0.9 \frac{1}{(1 - 0.9)^2} = \dots = 10t - 90. \quad (1.1) \end{aligned}$$

*yves.aragon@gmail.com

Exercice 1.2 (SARMA et opérateur retard)

Ecrire le modèle SARMA (1.2) à l'aide de l'opérateur retard.

$$y_t - 50 = 0.9(y_{t-12} - 50) + z_t - 0.7z_{t-1}, \quad (1.2)$$

où les z_t sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 17.5)$.

Réponse. Modèle SARMA (1.2) exprimé à l'aide de l'opérateur retard :

$$y_t - 50 = 0.9 (B^{12}y_t - 50) + z_t - 0.7 Bz_t = 0.9 B^{12}(y_t - 50) + (1 - 0.7 B)z_t \quad (1.3a)$$

$$(1 - 0.9 B^{12})(y_t - 50) = (1 - 0.7 B)z_t \quad (1.3b)$$

$$y_t - 50 = \frac{1 - 0.7 B}{1 - 0.9 B^{12}} z_t \quad (1.3c)$$

$$y_t = 50 + \frac{1 - 0.7 B}{1 - 0.9 B^{12}} z_t. \quad (1.3d)$$

Alternativement, comme $(1 - 0.9 B^{12})50 = 0.1 \times 50 = 5$, en multipliant les deux côtés de (1.3d) par $1 - 0.9 B^{12}$, on obtient :

$$(1 - 0.9 B^{12})y_t = 5 + (1 - 0.7 B)z_t. \quad (1.4)$$

Pour obtenir ces différentes écritures du SARMA (1.2) nous avons exploité le fait, noté plus haut, que l'opérateur retard appliqué à une constante donne cette constante. Chacune de ces écritures a ses mérites et il est important de savoir passer de l'une à l'autre en fonction notamment de l'interlocuteur et des outils informatiques qui privilégient l'une ou l'autre.